ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ, ПЛОСКОСТЕЙ И ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В ТРЁХМЕРНОМ И ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОБАЧЕВСКОГО

Д. Д. Мордухай-Болтовский

§ 1. Настоящая небольшая статья задаётся целью обратить внимание геометров на области элементарной неевклидовой геометрии, до сих пор очень мало исследованные. Она затрагивает сравнительно простые вопросы, относящиеся к параллельности и перпендикулярности прямых, плоскостей и гиперплоскостей в трёхмерном и четырёхмерном пространствах Лобачевского. Но уже эти простые вопросы требуют довольно сложных рассуждений, порой делая неизбежным обращение к проективной интерпретации, детали которой я избегаю излагать, имея образцом такую интерпретацию для двумерного и трёхмерного пространств.

Я открываю довольно широкую область исследования, питая надежду, что найдутся читатели, которые, пользуясь излагаемыми здесь основными теоремами и построениями, обратятся к решению более сложных задач, например об углах, образуемых двумя плоскостями в неевклидовом пространстве, и о величинах, им соответствующих в случае сверхпараллельности. Все получаемые мной результаты широко используются в начертательной геометрии четырёхмерного неевклидова пространства, а равно в механике такого пространства.

Занимаясь сейчас механикой, я в особенности приглашаю читателя к развитию начертательной геометрии. В то время как построения начертательной геометрии четырёхмерного евклидова пространства (развиваемые по моему предложению доц. Н. В. Наумович, о чём были сделаны доклады в семинаре проф. Н. Ф. Четверухина) не встречали особенно серьёзных затруднений для математика, приобретшего уже навык оперирования в четырёхмерном пространстве, аналогичные исследования в неевклидовом пространстве оказываются значительно трудней, предполагая вместе с тем и навык в неевклидовой геометрии.

Отрывочность в изложении этой заметки неизбежна, так как речь должна итти не о какой-либо сложной задаче вроде задачи Малфатти в четырёхмерном или в неевклидовом пространстве, но только о нескольких основных задачах, необходимых для осуществления намеченных выше более серьёзных планов.

Кроме того, неизбежно и довольно напряжённое внимание читателя, который оказывается в двух областях, ознакомление с которыми, как показал опыт, даётся нелегко, а именно: с одной стороны — с четырёхмерным пространством, с другой стороны — с пространством Лобачевского.

§ 2. Так как уже по своему определению две параллельные прямые находятся в одной плоскости, то их изучение в четырёхмерном пространстве сводится просто к изучению их на *плоскости*. Что же касается до *параллельных плоскостей*, то здесь следует различать случай, когда плоскости находятся *в одной гиперплоскости*, т. е. в одном трёхмерном пространстве, и когда они не лежат в одной гиперплоскости.

В *евклидовом* пространстве в первом случае плоскости имеют *общую прямую*, во втором — только общую *точку*.

В первом случае имеем *полную параллельность*, во втором — *полупараллельность*; в первом имеется общая бесконечно удалённая прямая, во втором — только одна бесконечно удалённая точка.

В случае неевклидова пространства при построении аналогов этих взаимных положений плоскостей приходится вводить вместе с бесконечно удалёнными (несобственными) элементами ещё *идеальные*.

На плоскости параллельные прямые мыслятся как пересекающиеся в несобственной точке, а сверхпараллельные — как пересекающиеся в идеальной точке, причём доказывается, что для сверхпараллельных прямых имеется общий перпендикуляр.

В трёхмерном пространстве сверхпараллельные прямые пересекаются тоже в идеальной точке, причём для сверхпараллельных прямых существует общая перпендикулярная плоскость.

Нетрудно установить аналогичным образом, что в четырёхмерном пространстве для сверхпараллельных прямых существует общая перпендикулярная гиперплоскость.

Для неевклидова пространства первым типом параллельности плоскости или *полной параллельностью* будет *параллельность двух плоскостей по некоторой прямой* l, состоящая в том, что две плоскости проходят через *идеальную прямую*, имеющую одну бесконечно удалённую точку, именно, через бесконечно удалённую точку прямой b. Может быть более удачным было бы выражение: «параллельность по *определённому направлению*», так как прямую l можно заменить всякой прямой, ей параллельной, т. е. проходящей через ту же бесконечно удалённую точку.

В проективной интерпретации [1] будем иметь две плоскости, проходящие через прямую, касательную к *основной гиперсфере* (заменяющей сферу при интерпретации трёхмерной геометрии). Такие две плоскости, очевидно, имеют пучки между собой параллельных прямых. Второй же тип — это *полупараллельность*; в этом случае плоскости имеют общей только одну бесконечно удалённую точку.

Также следует различать два типа сверхпараллельных плоскостей, смотря по тому, имеют ли место пересечения по идеальной прямой (в таком случае плоскости оказываются в одной гиперплоскости) или же только в одной идеальной точке (в этом случае они уже не будут в одной гиперплоскости).

§ 3. Так как две плоскости π и ρ, параллельные по прямой, лежат в одной гиперплоскости, то построение по данной плоскости π параллельной ей плоскости ρ, проходящей через данную точку M, является построением в трёхмерном пространстве.

Производится оно следующим образом: через l перпендикулярно к π проводится плоскость σ. Через M проводится прямая $l' \perp \sigma$. Искомая плоскость ρ проходит через l' и $l'' \parallel l$, проходящую через M.

Доказывается это построение с помощью проективной интерпретации, в которой реальные точки плоскости интерпретируются точками внутри основной сферы Ω, а идеальные точки — вне Ω, реальные прямые l — прямыми (l), пересекающими сферу, идеальные — проходящими вне Ω. Идеальная прямая с одной бесконечно удалённой точкой интерпретируется касательной к Ω.

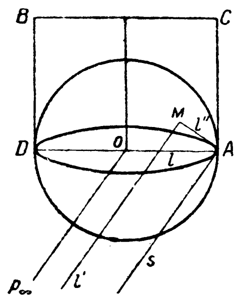

Рис. 1.

Сферу возьмём так, чтобы плоскость (π), интерпретирующая π, была диаметральной плоскостью Ω, а прямая (l) — её диаметром. Тогда полюс P_∞ прямой (l) относительно пересечения (π) и Ω окажется на бесконечности евклидова пространства на прямой (t), проходящей через центр O сферы Ω и перпендикулярной к плоскости (σ) — $ABCD$, интерпретирующей плоскость σ, проходящую через l и перпендикулярную к π (см. рис. 1).

Полюс (σ) совпадает с P_∞, и точку P_∞ можно считать также лежащей на прямой (s), которая касается окружности пересечения Ω и (π) в конце A прямой (l). Прямая (l'), проходящая через M и P_∞, будет интерпретировать прямую $l' \perp \sigma$, прямая же (l''), проходящая через M и A, будет интерпретировать $l'' \parallel l$. Но (l'), (l''), (S) оказываются в одной плоскости, так что плоскость, проходящая через (l') и (l''), будет интерпретировать плоскость ρ, проходящую вместе с σ через идеальную прямую с одной реальной точкой. Две полупараллельные плоскости — это плоскости, параллельные одной прямой l. Через данную точку можно провести *бесконечное* множество плоскостей, полупараллельных данной плоскости по данной прямой, но через данную прямую, вообще говоря, можно провести только *две* плоскости, полупараллельные данной плоскости по некоторой прямой. Они будут проходить через данную прямую и через бесконечно удалённую точку прямой, по которой устанавливается параллельность (каковых на прямой две).

§ 4. Две гиперплоскости параллельны в евклидовом пространстве, если они проходят через одну и ту же бесконечно удалённую плоскость. По аналогии с ранее изложенным о параллельности двух плоскостей параллельность двух *гиперплоскостей* в неевклидовом пространстве определяется следующим образом.

Две гиперплоскости $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ параллельны по *данной плоскости* λ и принадлежащей ей *прямой* l, если они проходят через идеальную плоскость, в которой лежит идеальная прямая плоскости λ с её неевклидовой бесконечно удалённой точкой на l.

Построение гиперплоскости, параллельной данной гиперплоскости $\bar{\alpha}$ и проходящей через данную точку M, аналогично приведённому выше построению плоскости, параллельной данной в трёхмерном пространстве (оно устанавливается при помощи проективной интерпретации).

Через плоскость λ проводится гиперплоскость, перпендикулярная к α. К ней из точки M проводится перпендикулярная прямая l''. Через M в гиперплоскости, определяемой M и плоскостью λ, проводится плоскость λ', параллельная λ по прямой l. Искомая гиперплоскость определяется прямой l'' и плоскостью λ'.

§ 5. Можно говорить о перпендикулярности прямой к гиперплоскости, когда прямая перпендикулярна ко *всем* прямым этой гиперплоскости, проходящим через её основание. При этом, если прямая перпендикулярна к трём прямым, она перпендикулярна и ко всем прямым.

Доказательство можно вести по образцу известного доказательства соответствующей стереометрической теоремы (не зависящей от аксиомы о параллельных [2]).

Для краткости мы укажем только пары треугольников, через установку равенства которых мы должны итти. Пусть Aa, Ab, Ac — три прямые гиперплоскости, перпендикулярные данной прямой SA, Ai — произвольная прямая в той же гиперплоскости (i берётся в плоскости abc). Продолжаем SA в другую сторону от гиперплоскости на отрезок $S'A = AS$ и доказываем:

$$\Delta SAa \equiv \Delta S'Aa, \quad \Delta SAb \equiv \Delta S'Ab, \quad \Delta SAc \equiv \Delta S'Ac;$$

отсюда получаем:

$$\Delta Sab \equiv \Delta S'ab, \quad \Delta Sbc \equiv \Delta S'bc, \quad \Delta Sca \equiv \Delta S'ca$$

и затем $\Delta Saf \equiv \Delta S'af$, $\Delta Sce \equiv \Delta S'ce$, $\Delta Sbg \equiv \Delta S'bg$ (точки e, f, g выбираются на прямых bc, ac и ab так, что ae, bf, eg пересекаются в точке i). Далее получаем $\Delta Sfb \equiv \Delta S'fb$, наконец, равенство ΔSAi и $\Delta S'Ai$, откуда выводится, что

$$\angle SAi = \angle S'Ai = d.$$

Можно ещё сводить перпендикулярность прямой к гиперплоскости к перпендикулярности к двум плоскостям на этой гиперплоскости. В самом деле, тогда прямая будет перпендикулярна к трём прямым, принадлежащим одной гиперплоскости: каким-либо двум на двух плоскостях и ещё к прямой их пересечения.

Плоскость, перпендикулярная к одной прямой на плоскости S, полуперпендикулярна к ней, но перпендикулярная к двум обязательно перпендикулярна ко всем проходящим через точку пересечения, а поэтому *вполне* перпендикулярна.

§ 6. Две сверхпараллельные прямые AC и BD, как известно, на плоскости имеют общий перпендикуляр.

Нетрудно доказать следующее его построение: через точку A проводится гиперцикл AC с осью BD и из середины AC (между точками пересечения) проводится $FE \perp AC$. Такое построение производится с помощью гиперциркуля, циркуля и линейки и, как показал Н. М. Несторович [3], всё построение с помощью этих трёх инструментов сводится к построению с помощью комплекса Евклида.

§ 7. Проективная интерпретация сейчас же обнаруживает наличие общего перпендикуляра к двум сверхпараллельным плоскостям π и π'. Каким образом он находится?

Из точки M плоскости π опускается перпендикуляр Mm на плоскость π'. Через некоторую точку E прямой Mm проводится плоскость $\sigma — EPN \perp Mm$ (рис. 2). Если NP — прямая пересечения σ с π, то на ней берутся точки NP в равных расстояниях от E. Вследствие равенства $\triangle MNE$ и $\triangle MPE$ получаем, что $\angle EMN = \angle EMP$ и $MP = MN$. В равнобедренном $\triangle MNP$ проводится $MF \perp PN$ и пусть mf—её проекция MF на π'. Общий перпендикуляр l к MF и mf будет искомым общим перпендикуляром плоскостей π и π'.

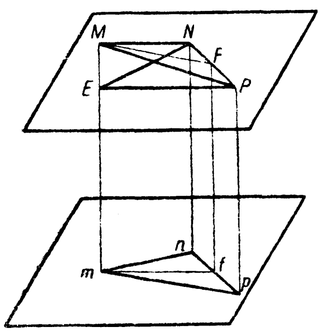

Рис. 2.

В самом деле l будет вследствие симметрии $MNPmnp$ относительно плоскости MmF перпендикулярной к PN и pn, а будучи перпендикулярной также к MF и mf, будет перпендикулярной к плоскостям π и π'.

§ 8. Аналогичное построение проводится для двух сверхпараллельных *гиперплоскостей*. Различие состоит в том, что вместо проектирования на плоскость π' берётся проектирование на гиперплоскость $\bar{\pi}'$. Вместо плоскости $\perp Mm$ берётся гиперплоскость $\bar{\sigma}$; в плоскости пересечения $\bar{\sigma}$ и $\bar{\pi}$ берётся окружность — геометрическое место точек, равноостоящих от E. Вместо биссектрисы MF угла PMN берётся прямая, соединяющая E с центром этой окружности.

§ 9. Две гиперплоскости $\bar{\pi}$ и $\bar{\pi}'$ *перпендикулярны* между собой, если *линейный угол* между ними прямой. Линейный же угол определяется так: одна его сторона, находясь в $\bar{\pi}$, перпендикулярна к плоскости пересечения $\bar{\pi}$ и $\bar{\pi}'$, другая таким же образом получается в $\bar{\pi}'$.

1) Гиперплоскость, проходящая через прямую $a \perp \bar{\pi}$, перпендикулярна к $\bar{\pi}$.

2) Плоскость α перпендикулярна к $\bar{\pi}$, если всякая проходящая через α гиперплоскость, перпендикулярна к $\bar{\pi}$.

3) В четырёхмерном пространстве для плоскостей различают *полную перпендикулярность от полуперпендикулярности.*

Две плоскости α, β вполне перпендикулярны, если каждая прямая в одной плоскости перпендикулярна к каждой прямой на другой. В случае же полуперпендикулярности только одна прямая одной перпендикулярна ко всем прямым другой. В этом случае обе плоскости находятся в одной гиперплоскости $\bar{\pi}$.

4) Через данную точку M в данной плоскости можно провести только *одну* плоскость, вполне перпендикулярную к этой плоскости. В самом деле, в случае полной перпендикулярности α к β из точки M можно провести в α бесконечное множество перпендикуляров к β, из которых уже одна пара определяет плоскость α

5) Но можно провести бесконечное множество полуперпендикулярных к β плоскостей, проходящих через единственный перпендикуляр из M к β.

6) Через точку M можно провести только одну прямую, перпендикулярную к гиперплоскости $\bar{\pi}$, но можно провести бесконечное множество прямых, перпендикулярных к данной плоскости π. Все они лежат в плоскости β, вполне перпендикулярной к π.

Все эти понятия и положения, как независимые от аксиомы о параллельных, остаются в силе и в пространстве Лобачевского.

§ **10.** Теорема о том, что условием, необходимым и достаточным для перпендикулярности прямой к плоскости, является перпендикулярность её проекций к одноимённым следам плоскости на двух перпендикулярных плоскостях, остаётся в силе и в пространстве Лобачевского.

Доказательство развёртывается так же, как в евклидовом пространстве. Его можно найти в любом учебнике начертательной геометрии.

§ **11.** Аналогом этой теоремы является теорема как евклидовой, так и неевклидовой четырёхмерной геометрии. Условие перпендикулярности прямой a и гиперплоскости $\bar{\omega}$ состоит в перпендикулярности проекций на взаимно перпендикулярные гиперплоскости $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ к плоскостным следам $\bar{\omega}$ на этих гиперплоскостях.

Так как проектирующая прямую a плоскость γ проходит через перпендикуляр к $\bar{\omega}$, а также через перпендикуляр $\bar{\alpha}$, то γ будет такова, что каждая её прямая будет перпендикулярна к каждой прямой плоскости α, пересечения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\omega}$.

Для установки *достаточности* условия следует отметить, что плоскость α перпендикулярна к проектирующей плоскости γ, так как она перпендикулярна к двум прямым: к перпендикуляру к $\bar{\alpha}$ и к проекции прямой a, а поэтому и ко всем прямым в γ.

Гиперплоскость $\bar{\gamma}$, проходящая через эту плоскость, будет перпендикулярна к γ. Взяв δ, проектирующую a на $\bar{\beta}$, получим, что $\bar{\gamma}$ также $\perp \delta$, а затем к пересечению γ и δ, т. е. к заданной прямой.

§ **12.** В особенности интересным является исследование *общего перпендикуляра* между двумя прямыми в трёхмерном и четырёхмерном пространствах.

Оказывается, что в то время как в *евклидовом* трёхмерном пространстве только *одна* прямая перпендикулярна к двум непересекающимся прямым, в пространстве Лобачевского их вообще *две* (идеальные образы учитываются). В этом нетрудно убедиться с помощью *проективной интерпретации*. Псевдоперпендикуляром плоскости $(\pi)'$ в этой интерпретации является прямая, проходящая через полюс этой плоскости относительно основной сферы.

Все псевдоперпендикуляры к псевдоплоскостям, проходящим через (a), т. е. все псевдоперпендикулярны к (a) будут проходить через точки (a'), поляры (a).

Общим псевдоперпендикуляром к (a) и (b) будет прямая, пересекающая четыре прямые: (a), (a'), (b) и (b') (поляру (b)).

Но, как известно, согласно исследованиям Штейнера, таких прямых существует две (причём они могут оказаться и мнимыми).

Чтобы в этом убедиться, берём точки пунктуала на l_3 и проводим через каждую его точку и прямые l_1 и l_2 плоскости z_1 и z_2, которые отсекут на l_4 два наложенных проективных пунктуала. Искомой прямой будет та, которая, являясь пересечением π_1 и π_2, ещё проходит через двойную точку пунктуала l_4. Таких двойных точек две, причём они могут быть как вещественными, так и мнимыми.

§ 13. Следует заметить, что эти псевдоперпендикуляры, будучи вещественными в интерпретации, могут в самом неевклидовом пространстве оказаться *идеальными*.

Если (a) и (b) в одной плоскости, то то же относится и к (a') и (b'). Если (a) и (b) пересекаются *внутри* основной сферы, то обе пары пересекающих прямых сливаются в одну. Если точка пересечения — *вне* основной сферы, то её полярная плоскость совпадает с плоскостью, определяемой (a') и (b'), и будет обязательно пересекать основную сферу, т. е. прямая, перпендикулярная к двум прямым, будет *реальной*.

Весьма важно также отметить, что всегда *при реальности одного перпендикуляра другой должен быть идеальным*, в чём нетрудно убедиться совершенно элементарным рассуждением.

Если бы эти перпендикуляры P_1P_1' и P_2P_2' были оба реальны, то в косом четырёхугольнике $P_1P_2'\ P_2P_2'$ сумма углов равнялась бы $4d$. Но тогда, учитывая то, что в трёхгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего (что верно как в евклидовом, так и в неевклидовом пространстве), получаем, что сумма углов в двух треугольниках, $\triangle PP_1'P_2'$ и $\triangle P_1P_2P_2'$, больше $4d$ и потому хотя бы в одном $> 2d$, чего не может быть в пространстве Лобачевского.

То, что хотя бы один перпендикуляр реален, можно заключить из необходимости существования прямой кратчайшего расстояния.

§ 14. Изложение сейчас является образцом для установки существования двух общих перпендикуляров к плоскости в четырёхмерном пространстве Лобачевского: одного реального, другого идеального.

Задача эта в проективной интерпретации сводится к проведению прямых, пересекающих две плоскости (λ_1), (λ_2) и две прямые (l_1), (l_2).

Для установки наличия двух прямых следует рассматривать два проективных пунктуала на l_2, отсекаемых гиперплоскостями $(\lambda_1 M)$ и $(\lambda_2 M)$, где M — точка пунктуала l_1.

§ 15. К изложенному ещё следует прибавить доказательство того, что по перпендикуляру и двум прямым определяется кратчайшее расстояние между ними. Предполагая, что MN — общий перпендикуляр к прямым MM', NN' (рис. 3), берём точки M', N', бесконечно близкие к M, N. Проводим через M' плоскость $\perp NN'$. Эта плоскость пусть пересекает NN' в точке $\overline{N}$. Тогда в $\triangle \overline{N}M'N'$ $M'N' > M'\overline{N}$, т. е. наклонная больше перпендикуляра к NN'. Но ещё следует показать, что

$$M'\overline{N} > MN.$$

Находим для этого точку $\overline{M}$, как точку пересечения трёх плоскостей:

1) $MN\overline{N}$,

2) плоскости из $\overline{N} \perp NN'$,

3) из $M \perp MN$.

Далее заметим, что, если $M\overline{M}$ — бесконечно малая первого порядка, то

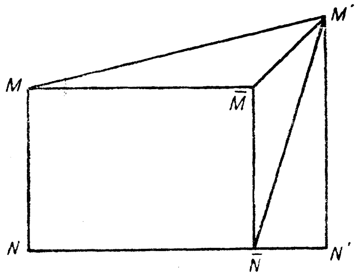

Рис. 3.

$\angle\overline{M}$, MM' — тоже первого порядка, а $\overline{M}M'$ — уже второго. Тогда из трипрямоугольника $\overline{M}\overline{N}\,MN\ldots\overline{MN} > MN$, т. е. $\overline{MN} = MN\ (1+\alpha)$, где $\alpha > 0$. Но $M'N' > M'\overline{N}$, т. е. $M'N' = M''\overline{N}\,(1+\beta)$; наконец,

$$M'\overline{N} = \overline{M}\overline{N}\,(1+\gamma),$$

где γ — бесконечно малая высшего порядка в сравнении с α, β, причём положительная или отрицательная. Таким образом,

$$M'N' = MN\ (1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = MN\ (1+\alpha+\beta+\varepsilon),$$

где ε — высшего порядка, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, так что

$$M'N' = MN\,(1+\delta),$$

где $\delta > 0$ и

$$M'N' > MN.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Клейн, Неевклидова геометрия, Москва.

[2] Rouché et Comberousse, Geometrie или книга Адамара.

[3а] Несторович, Об эквивалентности в конструктивном отношении комплексов, ДАН СССР **XXI** (1939).

[3б] Несторович, О конструктивной мощности комплексов в плоскости Лобачевского, ДАН СССР **XIII**, № 5 (1944).